2021 - Revision

ශ්‍රේණි - පසුගිය විභාග ගැටළු

2000

01. n ඕනෑම ධන නිඛිලයක් සඳහා $U_n = 1.n + 2.(n-1) + \ldots\ldots + (n-1).2 + n.1$ යයි ගනිමු. ගණිත අභ්‍යුහනයෙන් $u_n = 1/6\, n(n+1)(n+2)$ බව පෙන්වන්න. n ඕනෑම ධන නිඛිලයක් සඳහා $\frac{1}{U_n} = V_n - V_{n+1}$ වන අයුරින් V_n සොයන්න. එනයින් හෝ අන්ක්‍රමයකින් හෝ $\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{u_r} = \frac{3}{2} - \frac{3}{(n+1)(n+2)}$ බව පෙන්වන්න. $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{U_n}$ හි අගය අපෝහනය කරන්න.

2001

02. $n = 1, 2, 3 \ldots\ldots$ සඳහා $A_{n+1} = (1-\alpha)(1-A_n) + A_n$ සහ $A_1 = \beta$ යයි ගනිමු. මෙහි α හා β තාත්වික වේ. ගණිත අභ්‍යුහනය පිළිබඳ මූලධර්ම උපයෝගී කරගෙන සෑම n ධන නිඛිලයක් සඳහා $A_n = 1 - (1-\beta)\alpha^{n-1}$ බව සාධනය කරන්න. $\sum_{r=1}^{n} A_r$ සොයන්න.

2002

03. ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්ම යොදා ගනිමින් සෑම n ධන නිඛිලයක් සඳහා $n! \geq 2^{n-1}$ බව සාධනය කරන්න. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{K!} \leq 2 - \frac{1}{2^n - 1}$ බව අපෝහනය කරන්න. එනයින් $e \leq 3$ බව පෙන්වන්න. මෙහි e යනු ප්‍රකෘති ලඝු ගණක වල පාදය වේ.

2003

04. ගණිත අභ්‍යුහනය පිළිබඳ මූලධර්මය යොදා ගනිමින් සෑම n ධන නිඛිලයක් සඳහාම $8(n+1)! > 2^{n+1}(n+2)$ බව සාධනය කරන්න. $\sum_{k=1}^{n} \frac{K!}{2^K} > \frac{1}{16}(n^2 + 3n + 4)$ බව අපෝහනය කරන්න. එනයින් $\sum_{k=1}^{n} \frac{K!}{2^K}$ ශ්‍රේණියේ අභිසාරී නොවන බව පෙන්වන්න.

2004

05. ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්ම උපයෝගී කරගනිමින් සෑම n නිඛිලයක් සඳහා

$$\frac{1}{2^2 - 1} + \frac{1}{3^2 - 1} + \ldots\ldots + \frac{1}{(n+1)^2 - 1} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2(n-1)} - \frac{1}{2(n+2)}$$

බව පෙන්වන්න. එනයින් $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{r(r+2)}$ ශ්‍රේණියේ අභිසාරී බව අපෝහනය කර පද අනන්තයක ඓක්‍යය සොයන්න.

2005

06. ගණිත අභ්‍යුහනයේ සෑම n සඳහාම $\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \ldots\ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}$ බව සාධනය කරන්න.

$\frac{1}{4} - \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r(r+1)(r+2)} < \frac{1}{100}$ වන කුඩාතම n නිඛිලය සොයන්න.

2006

07. (a) P යනු නිඛිලයක් යැයි සිතමු. ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මයෙන් භාවිතයෙන් සියලු ධන නිඛිලමය n සඳහා $P^{n+1} + (p+1)^{2n-1}$ යන්න $P^2 + p + 1$ යන්නෙන් බෙදෙන බව සාධනය කරන්න.

(b) $\frac{1}{1+1^2+1^4}+\frac{2}{1+2^2+2^4}+\frac{3}{1+3^2+3^4}+\text{-----}$ ශ්‍රේණියේ r වැනි පදය U_r ලියන්න.

(i) $U_r=\frac{1}{2}\left\{f(r)-\frac{1}{1+r+r^2}\right\}$ බව පෙන්වන්න. මෙහි $f(r)$ යනු r හි නිර්නය කළ යුතු ශ්‍රිතයකි.

(ii) $f(r+1)$ සොයා $U_r=\frac{1}{2}\{f(r)-f(r-1)\}$ බව පෙන්වන්න.

(iii) දෙන ලද ශ්‍රේණියෙහි පද n දක්වා ඓක්‍යය $\frac{n(n+1)}{2(1+n+n^2)}$ බව පෙන්වන්න.

2007

08. (a) ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය උපයෝගී කරගනිමින්, ධන නිඛිලමය n සඳහා $\frac{n^7}{7}+\frac{n^5}{5}+\frac{n^3}{3}+\frac{34n}{105}$ යන්න නිඛිලයක් බව සාධනය කරන්න.

(b) $\frac{3}{1.2}\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{4}{2.3}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{3.4}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\text{..........}$ ශ්‍රේණියේ r වෙනි පදය වන u_r ලියා දක්වන්න.

$u_r=f(r-1)-f(r)$ වන අයුරින් $f(r)$ සොයන්න.

ඒ නයින් $S_n=\sum_{r=1}^{n}u_r$ සොයන්න. $\lim_{n\to\infty}S_n$ අගයන්න.

2008

09. (a) ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය උපයෝගී කරගනිමින්, ධන නිඛිලමය n සඳහා $5^{n+1}-2^{n+1}-3^{n+1}$ යන්න 6 න් බෙදිය හැකි බව සාධනය කරන්න.

(b) (i) $\sum_{r=1}^{n}{}^{n}C_r$ සොයා, ධන නිඛිලමය n සඳහා $\frac{2^n}{n}>\frac{(n-1)}{2}$ බව අපෝහනය කරන්න.

(ii) අපරිමිත ශ්‍රේණියක r වැනි පදය u_r යන්න $\frac{2^{r-1}r}{(r+1)(r+2)}$ මගින් දෙනු ලැබේ.

$u_r=f(r)-f(r-1)$ වන පරිදි $f(r)$ සොයන්න.

ඒ නයින් $\sum_{r=1}^{n}u_r=S_n$ සොයන්න.

$\mathbb{R}$ තුළ $\lim_{n\to\infty}S_n$ පවතී ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

2009

10. අපරිමිත ශ්‍රේණියක r වෙනි පදය u_r යන්න $\frac{(2r+1)}{(3r-2)(3r+1)}\frac{1}{7^r}$ මගින් දෙනු ලැබේ. $u_r=f(r-1)-f(r)$ වන පරිදි $f(r)$ සොයන්න. ඒ නයින් $\sum_{r=1}^{n}u_r=S_n$ සොයා $\lim_{n\to\infty}S_n$ හි අගය සොයන්න.

2010

11. ඕනෑම n ධන නිඛිලයක් සඳහා, ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය මගින් $4n^3-6n^2+4n-1=n^4-(n-1)^4$ බව සාධනය කරන්න. ඒනයින් $r=1,2,\dots$ සඳහා $u_r-u_{r-1}=4r^3-6r^2+4r-1$ වන ආකාරයට u_r ලියා දක්වන්න.

$\sum_{r=1}^{n}r^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ බව අපෝහනය කරන්න. (ඔබට $\sum_{r=1}^{n}r^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ බව උපකල්පනය කළ හැකිය)

$1^2+(1^2+2^2)+(1^2+2^2+3^2)+(1^2+2^2+3^2+4^2)+\dots$ ශ්‍රේණියේ r වෙනි පදය v_r ලියා දක්වන්න.

$\sum_{r=1}^{n}v_r=\frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$ බව පෙන්වන්න. මෙම ශ්‍රේණිය අභිසාරී වේද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

$\frac{3}{1^2}+\frac{5}{1^2+2^2}+\frac{7}{1^2+2^2+3^2}+\frac{9}{1^2+2^2+3^2+4^2}+\dots$ ශ්‍රේණියේ r වෙනි පදය w_r යැයි ගනිමු.

$w_r=f(r)-f(r-1)$ වන ආකාරයට $f(r)$ සොයන්න. ඒ නයින් $S_n=\sum_{r=1}^{n}w_r$ සොයන්න. මෙම ශ්‍රේණිය අභිසාරී වේද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

2011

12. $r \in Z^+$ සඳහා $U_r = \dfrac{1}{(2r-1)(2y+1)(2r+3)}$ යැයි ගනිමු. r ඇසුරෙන් $\dfrac{U_{r+1}}{U_r}$ සොයන්න. ඒනයින්, $r = 1, 2, 3,$ ..... සඳහා $(2r-1)u_r - (2r+1)u_{r+1} = 4u_{r+1}$ බව පෙන්වන්න.

$\sum\limits_{r=1}^{n} U_r = \dfrac{1}{12} - \dfrac{1}{4(2n+1)(2n+3)}$ බව අපෝහනය කරන්න.

$\sum\limits_{r=1}^{\infty} U_r$ ශ්‍රේණිය අභිසාරී ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

2012

13. සියලු $x \in R$ සඳහා $12x^2 + 1 \equiv A(2x-1)^3 + B(2x+1)^3$ වන පරිදි A හා B නියත සොයන්න.

ඒනයින් $r \in Z^+$ සඳහා $u_r = f(r) - f(r+1)$, වන පරිදි $f(r)$ නිර්ණය කරන්න. මෙහි $u_r = \dfrac{12r^2+1}{(2r-1)^3(2r+1)^3}$ වෙයි.

$\sum\limits_{r=1}^{n} u_r = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2(2n+1)^3}$ බව පෙන්වන්න.

$\sum\limits_{r=1}^{\infty} u_r$ ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව පෙන්වා, $\sum\limits_{r=1}^{\infty} u_r$ හි අගය සොයන්න.

2013

14. $r \in Z+$ සඳහා $u_r = \dfrac{3(6r+1)}{(3r-1)^2(3r+2)^2}$ හා $n \in z^+$ සඳහා $S_n = \sum\limits_{r=1}^{n} u_r$ යැයි ගනිමු.

$r \in z^+$ සඳහා $u_r = \dfrac{A}{(3r-1)^2} + \dfrac{B}{(3r+2)^2}$ වන පරිදි A හා B නියතවල අගයන් සොයන්න.

ඒ නයින් $n \in Z^+$ සඳහා $S_n = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{(3n+2)^2}$ බව පෙන්වන්න.

$\sum\limits_{r=1}^{n} u_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී වේද? ඔබගේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

$\left|S_n - \dfrac{1}{4}\right| < 10^{-6}$ වන පරිදි වූ $n \in Z^+$ හි කුඩාතම අගය සොයන්න.

2014

15. $r \in Z^+$ සඳහා $U_r = \dfrac{r^2 - r - 5}{r(r+1)(r+4)(r+5)}$ යැයි ගනිමු.

$n = 0, 1, 2, 3$ සඳහා r^n හි සංගුණක සැසඳීමෙන්, $r \in Z^+$ සඳහා $r^2 - r - 5 = A(r^2-1)(r+5) + Br^2(r+4)$ වන පරිදි A හා B නියත පවතින බව පෙන්වන්න.

$r \in Z^+$ සඳහා $U_r = f(r) - f(r+1)$ වන පරිදි $f(r)$ සොයන්න.

$n \in Z^+$ සඳහා $\sum\limits_{r=1}^{n} U_r = \dfrac{n}{(n+1)(n+5)}$ බව පෙන්වන්න.

$\sum\limits_{r=1}^{\infty} U_r$ අනන්ත ශ්‍රේණිය අභිසාරී වන බව තවදුරටත් පෙන්වා, එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

ඒ නයින්, $\sum\limits_{r=3}^{\infty} 3U_r$ සොයන්න.

2015

16. $r \in Z^+$ සඳහා $A(r+5)^2 - B(r+1)^2 = r + C$ වන පරිදි A, B හා C නියතවල අගයන් සොයන්න.

ඒනයින්, අපරිමිත ශ්‍රේණියක r වන පදය $U_r = \dfrac{8}{(r+1)^2(r+3)(r+5)^2}$ යන්න $f(r) - f(r+2)$ ලෙස ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න. මෙහි $f(r)$ යනු නිර්ණය කළ යුතු ශ්‍රිතයක් වේ.

$\sum_{r=1}^{n} U_r$ ශ්‍රේණියේ ඓක්‍යය සොයා $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ ශ්‍රේණිය, $\frac{1}{8^2} + \frac{1}{15^2}$ ඓක්‍යයට අභිසාරී වන බව අපෝහනය කරන්න.

2016

17. $r \in Z^+$ සඳහා $U_r = \frac{10r+9}{(2r-3)(2r-1)(2r+1)}$ හා $f(r) = r(Ar+B)$ යැයි ගනිමු. මෙහි A හා B තාත්ත්වික නියත වේ.

$r \in Z^+$ සඳහා $U_r = \frac{f(r)}{(2r-3)(2r-1)} - \frac{f(r+1)}{(2r-1)(2r+1)}$ වන පරිදි A හා B නියත වල අගයන් සොයන්නන.

$n \in Z^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n} U_r = -3 - \frac{(n+1)(2n+3)}{(4n^2-1)}$ බව පෙන්වන්න.

$\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව තවදුරටත් පෙන්වා එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

2017

18. $c \geq 0$ යැයි ගනිමු. $r \in Z^+$ සඳහා $\frac{2}{(r+c)(r+c+2)} = \frac{1}{(r+c)} - \frac{1}{(r+c+2)}$ බව පෙන්වන්න. ඒ නයින් $n \in Z^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n} \frac{2}{(r+c)(r+c+2)} = \frac{(3+2c)}{(1+c)(2+c)} - \frac{1}{(n+c+1)} - \frac{1}{(n+c+2)}$ බව පෙන්වන්න.

$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{2}{(r+c)(r+c+2)}$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව අපෝහනය කර එහි ඓක්‍යය සොයන්න. c සඳහා සුදුසු අගයන් සහිත ව මෙම ඓක්‍යය භාවිතයෙන් $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r(r+2)} = \frac{1}{3} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(r+1)(r+3)}$ බව පෙන්වන්න.

2018

19. $r \in Z^+$ සඳහා $f(r) = \frac{1}{(r+1)^2}$ සහ $U_r = \frac{(r+2)}{(r+1)^2(r+3)^2}$ යැයි ගනිමු.

$r \in Z^+$ සඳහා $f(r) - f(r+2) = 4U_r$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $n \in Z^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{13}{144} - \frac{1}{4(n+2)^2} - \frac{1}{4(n+3)^2}$ බව පෙන්වන්න.

$\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව අපෝහනය කර එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

$n \in Z^+$ සඳහා $t_n = \sum_{r=n}^{2n} U_r$ යැයි ගනිමු.

$\lim_{n \to \infty} t_n = 0$ බව පෙන්වන්න.

2019

20. $r \in Z^+$ සඳහා $U_r = \frac{1}{r(r+1)(r+3)(r+4)}$ හා $V_r = \frac{1}{r(r+1)(r+2)}$ යැයි ගනිමු.

$r \in Z^+$ සඳහා $V_r - V_{r+2} = 6U_r$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $n \in Z^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{5}{144} - \frac{(2n+5)}{6(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$ බව පෙන්වන්න.

$r \in Z^+$ සඳහා $W_r = U_{2r-1} + U_{2r}$ යැයි ගනිමු.

$n \in Z^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n} W_r = \frac{5}{144} - \frac{(4n+5)}{24(n+1)(n+2)(2n+1)(2n+3)}$ බව අපෝහනය කරන්න.

ඒ නයින් $\sum_{r=1}^{\infty} W_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව පෙන්වා එහි ඓක්‍යය සොයන්න.